9.6 Rette nello spazio

Dalla geometria elementare sappiamo che l'intersezione di due piani non paralleli è una retta.

Definizione 9.6.1 *Si chiama* equazione cartesiana *di una retta r nello spazio il sistema:*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \tag{9.3}$$

con car $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2.$

Osserviamo che $a_ix + b_iy + c_iz = d_i$, per $i = 1, 2$, è l'equazione di un piano che contiene la retta r.

È chiaro quindi che di una retta si possono dare infinite equazioni cartesiane, di cui a volte è impossibile cogliere facilmente l'equivalenza. Vedremo più avanti come stabilire quando due diversi sistemi di equazioni descrivono la stessa retta.

Problema 9.6.2 *Scrivere l'equazione cartesiana della retta s parallela alla retta r, di cui viene data l'equazione, e passante per il punto $A = (x_0, y_0, z_0)$.*

Supponiamo che r abbia equazione cartesiana:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \,, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \,. \end{cases} \tag{9.4}$$

Allora per avere l'equazione di s basterà considerare i piani passanti per A e paralleli rispettivamente a ciascuno dei due piani che definiscono r. Applicando due volte il metodo esposto nel Problema 9.5.6, si ha che la retta s è definita dal sistema:

$$\begin{cases} a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + c_1(z - z_0) = 0 \,, \\ a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) + c_2(z - z_0) = 0 \,. \end{cases}$$

Vediamo ora un modo, a volte più comodo, di assegnare l'equazione di una retta. Dalla teoria dei sistemi lineari, sappiamo descrivere esplicitamente le soluzioni di un sistema del tipo (9.3) in funzione di un parametro reale.

Sappiamo per ipotesi che

$$\operatorname{car}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$

perché il sistema dato rappresenti una retta.

Procediamo come indicato nello Schema 1. Supponiamo che sia

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Allora le soluzioni del sistema che corrispondono alle coordinate dei punti appartenenti alla retta si possono descrivere così:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} d_1 - c_1 t & b_1 \\ d_2 - c_2 t & b_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}} = \lambda_1 t + x_0\,,$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} a_1 & d_1 - c_1 t \\ a_2 & d_2 - c_2 t \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}} = \lambda_2 t + y_0\,,$$

$$z = t\,,$$

dove:

$$\lambda_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}\,, \qquad x_0 = -\frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}\,,$$

$$\lambda_2 = -\frac{\det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}\,, \qquad y_0 = \frac{\det\begin{pmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}\,.$$

Allora:

$$P = (x, y, z) \in r \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } t \in \mathbb{R}\,.$$

Ovviamente, se il minore di $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ di ordine due con determinante non nullo fosse un altro, il procedimento sarebbe lo stesso, con l'unica differenza di scegliere come parametro una incognita diversa, in ottemperanza sempre allo Schema 1.

Viceversa abbiamo:

Proposizione 9.6.3 *Siano dati i vettori* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$*, non nullo, e* $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

L'insieme dei punti $P = (x, y, z)$ tali che:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \ , \ \textit{con } t \in \mathbb{R} \, , \tag{9.5}$$

è una retta.

Dim. Basta trovare un sistema che abbia (9.5) come espressione delle sue soluzioni. Ad esempio, se $\lambda_1 \neq 0$, possiamo scrivere $t = \frac{x - x_0}{\lambda_1}$ e, sostituendo nelle altre equazioni, si ha il sistema cercato:

$$\begin{cases} y = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(x - x_0) + y_0 \, , \\ z = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}(x - x_0) + z_0 \, . \end{cases}$$

□

Definizione 9.6.4 *L'equazione (9.5) è detta* equazione parametrica *della retta r e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono detti* parametri direttori *di r.*

Proposizione 9.6.5 *Se la retta r ha equazione cartesiana:*

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \, , \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \, , \end{cases}$$

una terna di suoi parametri direttori sono $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ con:

$$\lambda_1 = \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \, , \quad \lambda_2 = -\det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} \, , \quad \lambda_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \, .$$

Inoltre se è data una equazione cartesiana di r equivalente, i nuovi parametri direttori sono proporzionali ai vecchi.

La dimostrazione di ciò è una risistemazione di quanto espresso sopra per ricavare l'espressione parametrica delle soluzioni del sistema che esprime r.

I parametri direttori sono le coordinate del vettore geometrico v tale che la retta per l'origine $\mathbb{R}v$ è parallela a r.

Proposizione 9.6.6 *Due rette r e r' sono parallele se e solo se hanno parametri direttori proporzionali.*

Dim. Supponiamo che r abbia equazione parametrica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \,, \text{ con } t \in \mathbb{R} \,,$$

mentre r' abbia equazione parametrica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\lambda \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \,, \text{ con } s \in \mathbb{R} \,,$$

dove λ è il coefficiente di proporzionalità tra i parametri direttori.

Dimostriamo che la parallela a r passante per il punto $A' = (x_1, y_1, z_1)$ è proprio la retta r'. La retta r ha equazione cartesiana:

$$\begin{cases} \lambda_1(y - y_0) = \lambda_2(x - x_0) \,, \\ \lambda_1(z - z_0) = \lambda_3(x - x_0) \,. \end{cases}$$

Per il Problema 9.6.2, la retta r'' parallela a r passante per A' ha equazione cartesiana:

$$\begin{cases} \lambda_1(y - y_1) = \lambda_2(x - x_1) \,, \\ \lambda_1(z - z_1) = \lambda_3(x - x_1) \,. \end{cases}$$

Mostriamo che r'' coincide con r'.

Entrambe passano per A'. Scegliamo un punto B di r diverso da A'; mostriamo che anche $B \in r''$ e, siccome per due punti distinti sappiamo che passa una ed una sola retta, $r' = r''$ e quindi r e r' sono parallele.

Sia B il punto su r' corrispondente al valore del parametro $s = \frac{1}{\lambda}$. (Ricordiamo che $\lambda \neq 0$). Abbiamo $B = (\lambda_1 + x_1, \lambda_2 + y_1, \lambda_3 + z_1)$.

Sostituiamo le coordinate di B nelle equazioni del sistema di r''.

$$\lambda_1(\lambda_2 + y_1 - y_1) = \lambda_2(\lambda_1 + x_1 - x_1) \,, \quad \text{ossia } \lambda_1\lambda_2 = \lambda_2\lambda_1 \,,$$

$$\lambda_1(\lambda_3 + z_1 - z_1) = \lambda_3(\lambda_1 + x_1 - x_1) \,, \quad \text{ossia } \lambda_1\lambda_3 = \lambda_3\lambda_1 \,.$$

Quindi due rette con parametri direttori proporzionali sono parallele.

Viceversa supponiamo che le due rette r e r' siano parallele.

Allora l'equazione di r' si può ricavare, con il metodo visto nel Problema 9.6.2, da quella di r. Quindi questi due sistemi hanno la matrice dei coefficienti uguali e dunque, ricavando da essa i parametri direttori delle due rette come fatto nella Proposizione 9.6.5, tali parametri sono addirittura uguali. □

La forma parametrica dell'equazione di una retta facilita la risoluzione di molti tipici problemi di geometria analitica lineare nello spazio.

9.6.1 Retta passante per due punti

Siano $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ due punti nello spazio. Sia r la retta di equazione parametrica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ con } t \in \mathbb{R}\,. \tag{9.6}$$

È facile verificare che $A \in r$ (per $t = 0$) e anche $B \in r$ (per $t = 1$). Quindi r è la retta per A e B.

Osservazione 9.6.7 *Ricordando il significato geometrico dei parametri direttori di una retta e di un piano, possiamo dire che una retta è perpendicolare ad un piano se e solo se essi hanno parametri direttori proporzionali.*

Infatti, sia r la retta di equazione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ , con } t \in \mathbb{R}\,,$$

e π il piano di equazione $ax + by + cz = d$.

Allora la retta $r' = t \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}$ è parallela a r (per la Proposizione 9.6.6), mentre π' di equazione $ax + by + cz = 0$ è parallelo a π (per la Proposizone 9.5.5). Basta far vedere che r' è perpendicolare a π'. Sia $v = (\lambda at, \lambda bt, \lambda ct)$ il

genetico vettore appartenente a r'. Il vettore $w = (x_0, y_0, z_0)$ è perpendicolare a v se e solo se $< v, w >= 0$. Ma

$$< v, w >= (\lambda at, \lambda bt, \lambda ct) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \lambda t(ax_0 + by_0 + cz_0)\,.$$

Quindi w è perpendicolare a v se e solo se $< v, w >= ax_0 + by_0 + cz_0 = 0$, dunque se e solo se $w \in \pi'$.

9.6.2 Piano per un punto perpendicolare ad una retta

Sia $A = (x_1, y_1, z_1)$ e sia r la retta di equazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}\,,\ \text{con } t \in \mathbb{R}\,.$$

Per quanto detto nell'Osservazione 9.6.7, il piano π di equazione:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

soddisfa i requisiti.

9.6.3 Retta per un punto perpendicolare ad un piano

Sia $A = (x_1, y_1, z_1)$ e sia π il piano di equazione $ax + by + cz = d$. Sia r la retta di equazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\,,\ \text{con } t \in \mathbb{R}\,,$$

La retta r soddisfa i requisiti: passa per A (per $t = 0$) ed ha gli stessi parametri direttori di π e quindi è ad esso perpendicolare (per quanto detto nell'Osservazione 9.6.7).

9.6.4 Intersezione piano-retta

Sia π il piano di equazione $ax + by + cz = d$ e sia r la retta di equazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Per determinare gli eventuali punti di intersezione, basta sostituire nella equazione di π alle incognite x, y, z, rispettivamente, le espressioni di queste ricavate dalla equazione di r:

$$x = \alpha t + x_1, \quad y = \beta t + y_1, \quad z = \gamma t + z_1.$$

Si ottiene una equazione di primo grado in t del tipo:

$$(\alpha a + \beta b + \gamma c)t = d - (ax_1 + by_1 + cz_1).$$

In generale la soluzione di questa equazione dà il valore del parametro t che, sostituito nella equazione di r, determina le coordinate del punto di intersezione tra r e π.

Se $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ e $d - (ax_1 + by_1 + cz_1) \neq 0$, allora l'equazione non ha soluzione, dunque tale intersezione è vuota.

Se invece $\alpha a + \beta b + \gamma c = d - (ax_1 + by_1 + cz_1) = 0$, allora ogni t è soluzione. Geometricamente ciò significa che $r \subseteq \pi$.

Osservazione 9.6.8 *Se a, b, c e α, β, γ sono i parametri direttori della retta r e del piano π, rispettivamente, allora*

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$$

è la condizione affinché r e π siano paralleli.

Si noti che $\alpha a + \beta b + \gamma c$ è il prodotto scalare tra i parametri direttori di r e di π.

Esempio 9.6.9 *Sia π il piano di equazione $-2x - y + 2z = 1$ e sia r la retta di equazione*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Le espressioni da sostituire nella equazione di π sono:

$$x = 2t + 1\,, \quad y = -t + 2\,, \quad z = t + 1\,.$$

Sostituendo: $-2(2t+1) - (-t+2) + 2(t+1) = 1$, *da cui* $t = -3$.

Sostituendo $t = -3$ *nella equazione di* r, *si hanno le coordinate del punto di intersezione* P. *Si trova* $P = (-5, 5, -2)$.

9.6.5 Distanza punto-piano

Sia $A = (x_1, y_1, z_1)$ e sia π il piano di equazione $ax+by+cz = d$. Per calcolare la distanza tra il punto A e π occorre determinare la retta r passante per A e perpendicolare a π. Sia H il punto di intersezione tra r e π. Allora $d(A, \pi) = d(A, H)$.

Tutto ciò è compendiato dalla seguente formula:

$$d(A, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,. \tag{9.7}$$

9.6.6 Distanza punto-retta

Sia $A = (x_1, y_1, z_1)$ e sia r la retta di equazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \text{ con } t \in \mathbb{R}\,.$$

Per calcolare la distanza $d(A, r)$ si procede così:
1) Si scrive l'equazione del piano π perpendicolare a r e passante per A.
2) Si determinano le coordinate di $Q = r \cap \pi$.
3) Si calcola $d(A, Q)$ che è uguale a $d(A, r)$.

Esempio 9.6.10 *Sia* $A = (1, 1, 1)$ *e sia*

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } t \in \mathbb{R}\,.$$

Procediamo come indicato:
1) π *ha equazione* $(x-1) - (z-1) = 0$, *ossia* $x - z = 0$.
2) $x = t$, $z = -t$; *sostituendo trovo* $t = 0$, *quindi* $Q = r \cap \pi = (0, 1, 0)$.
3) $d(A, r) = d(A, Q) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Osservazione 9.6.11 *Due rette incidenti sono perpendicolari tra loro se e solo se il prodotto scalare tra i rispettivi parametri direttori è zero.*

In tal caso tutti i punti di una retta appartengono al piano passante per il punto di intersezione e perpendicolare all'altra retta.

9.6.7 Retta perpendicolare a due rette date

Sia r' la retta di equazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \text{ con } t \in \mathbb{R},$$

e sia r'' la retta di equazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \text{ con } s \in \mathbb{R}.$$

Vogliamo determinare l'equazione di una retta r tale che r sia perpendicolare sia a r' che a r''.

Fissati t e s, parametri reali, siano $P(t)$ e $Q(s)$ i punti su r' e r'', rispettivamente, determinati dai valori di t e s.

La retta per $P(t)$ e $Q(s)$ ha come parametri direttori la differenza delle coordinate dei due punti (vedi §9.6.1):

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 t + x_1 - \mu_1 s - x_2 \\ \lambda_2 t + y_1 - \mu_2 s - y_2 \\ \lambda_3 t + z_1 - \mu_3 s - z_2 \end{pmatrix}. \tag{9.8}$$

Affinché tale retta sia perpendicolare a r' deve risultare:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0, \text{ ossia } \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta + \lambda_3\gamma = 0. \tag{9.9}$$

Affinché tale retta sia perpendicolare a r'' deve risultare:

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0, \text{ ossia } \mu_1\alpha + \mu_2\beta + \mu_3\gamma = 0. \tag{9.10}$$

Si risolve poi il sistema formato dalle due equazioni (9.9) e (9.10) nelle incognite s e t. Se t_0 e s_0 una coppia di soluzioni di tale sistema, allora la retta r passante per $P(t_0)$ e $Q(s_0)$ è la retta cercata.

9.6.8 Mutua posizione di due rette nello spazio

Siano r' e r'' due rette nello spazio. Si sa che esse possono non appartenenti ad uno stesso piano, in tal caso si dicono *sghembe*, o complanari. In quest'ultimo caso possono essere incidenti (distinte), parallele (distinte) o coincidenti.

Vediamo come poter stabilire la mutua posizione di due rette conoscendo le loro equazioni.

Sia r' la retta di equazioni:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \, , \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \, , \end{cases}$$

e sia r'' la retta di equazioni:

$$\begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \, , \\ a_4x + b_4y + c_4z = d_4 \, . \end{cases}$$

Siano A e B le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} \, , \quad B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} \, .$$

Se r' e r'' fossero complanari, si potrebbe scegliere una equazione comune per entrambi i sistemi. In tal caso $\text{car}B < 4$. Quindi:

1) $\det B \neq 0 \iff r'$ e r'' sono sghembe; $\det B = 0 \iff r'$ e r'' sono complanari.

Se $\text{car}A = \text{car}B = 3$, per Rouché-Capelli il sistema lineare delle quattro equazioni nelle tre incognite avrebbe una e una sola soluzione. Ciò significa che $r' \cap r'' = \{P\}$. Ossia:

2) $\text{car}A = \text{car}B = 3 \iff r'$ e r'' sono incidenti (distinte).

Se $\text{car}A = 2$ e $\text{car}B = 3$, allora l'intersezione tra r' e r'' è vuota. Poiché esse però sono complanari, si ha:

3) $\text{car}A = 2$ e $\text{car}B = 3 \iff r'$ e r'' sono parallele (distinte).

Se $\text{car}A = \text{car}B = 2$, allora ogni soluzione del sistema che definisce r' è anche soluzione del sistema che definisce r'' e viceversa. Allora:

4) $\text{car}A = \text{car}B = 2 \iff r'$ e r'' sono coincidenti.

Non vi sono altri casi in quanto A ha come sottomatrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$, che per ipotesi ha rango 2.

9.7 Esercizi

Geometria analitica dello spazio

1) Dato il piano di equazione $2x - 6y + 2z - 3 = 0$, determinare l'equazione di un piano ad esso ortogonale e passante per i punti $P = (2, 0, -1)$ e $Q = (1, 2, -1)$.

2) Determinare, al variare di parametri reali h e k, la posizione reciproca dei due piani π_1 e π_2 di equazioni:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad 3x - y + hz = 9\,, \\ \pi_2 &: \quad 2x + ky + 2z = k\,. \end{aligned}$$

3) Determinare, al variare di parametri reali h e k, la posizione reciproca dei due piani π_1 e π_2 di equazioni:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad 3x + y + hz = k\,, \\ \pi_2 &: \quad 3x + ky = 1\,. \end{aligned}$$

4) Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, i seguenti piani:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad (a+3)x + 2y + z = 1\,; \\ \pi_2 &: \quad (a-3)x + 2y - z = 1\,; \\ \pi_3 &: \quad x + 2y = b\,. \end{aligned}$$

Determinare per quali valori di a, b i tre piani π_1, π_2, π_3:

i) si intersecano in un solo punto;

ii) passano per una stessa retta;

iii) coincidono.

5) Determinare il piano passante per la retta r:

$$\begin{cases} x = 3z + 2 \\ y = 2z - 3 \end{cases}$$

e per il punto P comune ai tre piani:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \{x + y + 2z + 1 = 0\}\,,\\ \pi_2 &= \{3x - y + z - 1 = 0\}\,,\\ \pi_3 &= \{x - 4y + 2z + 2 = 0\}\,.\end{aligned}$$

6) Scrivere le equazioni della retta dello spazio passante per il punto $P = (-2, 3, -3)$, in ciascuno dei seguenti casi:

i) la retta interseca la retta $r : \begin{cases} x = -2y\,, \\ z = -1\,, \end{cases}$ e la retta $s : \begin{cases} x = -y\,, \\ z = 1\,; \end{cases}$

ii) la retta è ortogonale e incidente alla retta $t : \begin{cases} x = 0\,, \\ y = 2z + 5\,; \end{cases}$

iii) la retta è ortogonale al piano contenente P e la retta $p : \begin{cases} x = -3\,, \\ z = -2\,; \end{cases}$

iv) la retta è parallela alla retta $q : \begin{cases} x - y + z + 8 = 0\,, \\ 2x + y + 8 = 0\,. \end{cases}$

Capitolo 10

CONICHE E QUADRICHE

10.1 Coniche come luoghi geometrici

Classicamente, con il nome generico di sezioni coniche o più brevemente coniche, venivano indicati i luoghi geometrici, noti fin dalla antichità, detti ellissi, parabole e iperboli, le cui specifiche definizioni richiamiamo qui di seguito, in quanto si ottenevano intersecando un cono con un piano.

Applicando i metodi della geometria analitica, vogliamo determinarne le equazioni in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale opportuno.

10.1.1 Ellisse

Scegliamo due punti del piano, F_1 e F_2, e fissiamo un segmento AB tale che la lunghezza di AB sia maggiore della lunghezza del segmento F_1F_2.

Definizione 10.1.1 *Si dice il luogo dei punti P del piano tali che:*

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{AB}\,, \tag{10.1}$$

dove $\overline{MN} = d(M, N)$ è la lunghezza del segmento MN.

I punti F_1 e F_2 si chiamano fuochi *dell'ellisse.*

Per determinare l'equazione di questo luogo geometrico, scegliamo un opportuno sistema di riferimento cartesiano.

Come asse delle ascisse scegliamo la retta r passante per i punti F_1 e F_2 e come semiasse positivo, quello che contiene F_1.

Come asse delle ordinate, la retta perpendicolare a r e passante per il punto medio del segmento F_1F_2.

In tale sistema di riferimento, il punto F_1 avrà coordinate $(c, 0)$ mentre F_2 avrà coordinate $(-c, 0)$ con $c > 0$.

Sia $P = (x, y)$ il generico punto del piano. Esso verifica la (10.1) se e solo se:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a\,, \qquad (10.2)$$

dove $d(A, B) = 2a$ con $a > 0$.

Elevando al quadrato entrambi i membri della (10.2), raccogliendo i termini simili e semplificando, si ottiene:

$$x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = -\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2}\,.$$

Ancora quadrando e sviluppando i calcoli, finalmente, si ha:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)\,.$$

Poiché $a > c$, possiamo scrivere $b^2 = a^2 - c^2$ e allora, dividendo per a^2b^2 entrambi i membri, si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \qquad (10.3)$$

Questa è detta equazione canonica dell'ellisse, cioè ricavata rispetto al sistema di riferimento privilegiato scelto come sopra, detto *riferimento canonico*.

Osservazione 10.1.2 *1) La retta $y = 0$ è un asse di simmetria per la nostra ellisse.*

Infatti, se $P = (x_0, y_0)$ verifica l'equazione (10.3), anche $P' = (x_0, -y_0)$, il punto simmetrico di P rispetto alla retta y=0, verifica la stessa equazione.
2) La retta $x = 0$ è un asse di simmetria.

Basta eseguire la verifica appena fatta con $P'' = (-x_0, y_0)$ al posto di P'.
3) L'origine $O = (0, 0)$ è un centro di simmetria.

Anche in questo caso basta verificare che se $P = (x_0, y_0)$ soddisfa l'equazione dell'ellisse, anche $Q = (-x_0, -y_0)$, il punto simmetrico di P rispetto all'origine, soddisfa tale equazione.

Il segmento $A'A''$, dove $A' = (a, 0)$ e $A'' = (-a, 0)$, è detto *asse maggiore*. Il segmento $B'B''$, dove $B' = (0, b)$ e $B'' = (0, -b)$, è detto *asse minore*. Il numero $e = \frac{c}{a}$ è detto *eccenticità*. Osserviamo che $0 < e < 1$.

10.1.2 Parabola

Fissiamo una retta r nel piano ed un punto F non appartenente a r.

Definizione 10.1.3 *Si dice* parabola *il luogo geometrico dei punti del piano che siano equidistanti da r e da F.*

La retta r si dice *direttrice*, mentre il punto F è detto *fuoco* della parabola.

Anche in questo caso, per scrivere l'equazione di una data parabola, scegliamo un sistema di riferimento opportuno.

Come asse delle ordinate, scegliamo la retta s passante per F e perpendicolare a r e, su di essa, scegliamo come semiasse positivo quello che contiene F. Come asse delle ascisse, la retta parallela a r e passante per il punto medio O del segmento FH, dove H è l'intersezione tra s e r.

In questo sistema di riferimento F ha coordinate $(0, p/2)$, dove $p = d(r, F)$. La direttrice r ha equazione $y = -p/2$.

Il punto P appartiene alla parabola avente r come direttrice e F come fuoco se e solo se:

$$\overline{PF} = d(P, r)\,. \tag{10.4}$$

Il generico punto del piano $P = (x, y)$ appartiene alla parabola, ossia soddisfa la (10.4), se e solo se le sue coordinate verificano la seguente equazione:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y - \frac{p}{2})^2} = |y + \frac{p}{2}|\,.$$

Elevando al quadrato entrambi i membri della equazione e semplificando, si ha:

$$x^2 = 2py\,. \tag{10.5}$$

Questa è l'equazione canonica della parabola.

Osservazione 10.1.4 *L'asse delle ordinate, $x = 0$, è un asse di simmetria per la parabola.*

Il punto di intersezione tra l'asse delle ordinate, in generale tra l'asse di simmetria della parabola, con la parabola stessa è detto *vertice* e, nel caso del sistema di riferimento scelto, il sistema di riferimento canonico, esso coincide con l'origine.

10.1.3 Iperbole

Scegliamo due punti del piano, F_1 e F_2 e fissiamo un segmento AB tale che la lunghezza di AB sia minore della lunghezza del segmento F_1F_2.

Definizione 10.1.5 *Si dice il luogo dei punti P del piano tali che:*

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = \overline{AB}\,. \tag{10.6}$$

I punti F_1 e F_2 si dicono dell'iperbole.

Per determinarne l'equazione, anche in questo caso è opportuno scegliere un sistema di riferimento particolare.

Come asse delle ascisse, scegliamo la retta r passante per i punti F_1 e F_2 e come semiasse positivo, quello che contiene F_1. Come asse delle ordinate, la retta perpendicolare a r e passante per il punto medio del segmento F_1F_2.

In tale sistema di riferimento, il punto F_1 avrà coordinate $(c, 0)$, mentre F_2 avrà coordinate $(-c, 0)$, con $c > 0$.

Sia $P = (x, y)$ il generico punto del piano. Esso verifica la (10.6) se e solo se:

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\right| = 2a\,,$$

dove $\overline{AB} = 2a$ con $a > 0$.

Procedendo come nel caso dell'ellisse si ottiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{10.7}$$

dove abbiamo posto $b^2 = c^2 - a^2$ in quanto, in questo caso, $0 < a < c$.

La (10.7) è l'equazione canonica dell'iperbole.

Definizione 10.1.6 *Le rette di equazione $y = x$ e $y = -x$ si dicono* asintoti *dell'iperbole.*

Osservazione 10.1.7 *1) L'iperbole ammette la retta y=0 come asse di simmetria.*
2) Anche la retta $x = 0$ è un asse di simmetria.
3) L'origine è un centro di simmetria.
4) La distanza tra un punto dell'iperbole di ascissa t e il punto di un asintoto con la stessa ascissa t tende a zero per t che tende all'infinito.

Ciò vuol dire che la curva si avvicina sempre più all'asintoto (senza mai intersecarlo).
5) Gli asintoti passano per il centro di simmetria e inoltre gli assi sono le bisettrici degli asintoti.
6) L'iperbole, a differenza dell'ellisse e della parabola, ha due rami disgiunti: uno è il luogo dei punti tali che

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a\,;$$

l'altro è il luogo dei punti tali che

$$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a\,.$$

10.2 Cambiamenti di coordinate

Abbiamo visto che nel caso di ellissi, parabole e iperboli, si ottiene sempre una equazione di secondo grado in due variabili.

Quello che ci chiediamo ora è questo:
Il fatto che l'equazione di una conica nel suo sistema di riferimento canonico sia di secondo grado implica che la equazione della stessa conica in un altro sistema di riferimento sia ancora di secondo grado? Più in dettaglio, come cambia l'equazione di una conica al variare del sistema di riferimento?

Se fissiamo un sistema di riferimento nel piano, come sappiamo, ad ogni punto P corrisponde una coppia di numeri reali e viceversa. Se cambiamo sistema di riferimento, allo stesso punto P corrisponderà una coppia di numeri in generale diversa dalla precedente. Si stabilisce così una corrispondenza biunivoca da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, detta *cambiamento di coordinate*, che alla coppia (x, y) fa corrispondere la coppia (x', y') tale che se $P = (x, y)$ nel vecchio sistema di riferimento, allora $P = (x', y')$ nel nuovo sistema.

Tale situazione si esprime con la funzione da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x' = f(x, y)\,, \\ y' = g(x, y)\,, \end{cases}$$

dove f e g sono funzioni di due variabili.

Cerchiamo di determinare la forma di f e g per i cambiamenti di sistema di riferimento particolarmente semplici e però di notevole interesse.

1. Traslazioni degli assi. Supponiamo che il nuovo sistema di riferimento si ottenga traslando gli assi del vecchio sistema per il vettore $v = (x_0, y_0)$.

In altre parole supponiamo che il nuovo asse delle ascisse sia una retta parallela al vecchio asse delle ascisse e con la stessa orientazione; lo stesso dicasi per l'asse delle ordinate ed inoltre il punto di intersezione tra i nuovi assi sia il punto O' avente coordinate (x_0, y_0) nel vecchio sistema di riferimento.

È facile verificare che il cambiamento di coordinate è dato dalla espressione:

$$\begin{cases} x' = x - x_0\,, \\ y' = y - y_0\,. \end{cases} \tag{10.8}$$

Cioè, un punto che ha coordinate (x, y) nel vecchio sistema di riferimento, avrà coordinate $(x', y') = (x - x_0, y - y_0)$ nel nuovo sistema.

Dalla (10.8) è facile ricavare la trasformazione inversa, quella che ci permette, conoscendo le nuove coordinate di un punto, di risalire alle sue vecchie coordinate:

$$\begin{cases} x = x' + x_0\,, \\ y = y' + y_0\,. \end{cases} \tag{10.9}$$

2. Rotazioni degli assi. Supponiamo ora che il nuovo sitema di riferimento abbia la stessa origine del vecchio sistema e che il nuovo semiasse positivo delle ascisse formi un angolo θ con il vecchio semiasse positivo delle ascisse (lo stesso dicasi del semiasse positivo delle ordinate).

Semplici considerazioni di natura trigonometrica permettono di dimostrare che il cambiamento di coordinate, in questo caso, assume la seguente forma:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta\,, \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta\,. \end{cases} \tag{10.10}$$

In forma matriciale, l'espressione (10.10) si può scrivere:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,. \tag{10.11}$$

La trasformazione inversa, quella che ci permette di risalire alle vecchie coordinate di un punto di cui si conoscano le nuove, sarà allora data dalla seguente espressione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\,. \tag{10.12}$$

Infatti, se $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, si ha $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tM \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, essendo:

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in O(2)\,. \tag{10.13}$$

Se scegliamo un nuovo sistema di riferimento, oltre che le coordinate dei punti, anche le equazioni dei luoghi geometrici.

Infatti, se un determinato luogo geometrico $\mathcal{L}$ aveva equazione $F(x, y) = 0$ e $P \in \mathcal{L}$, allora le coordinate di P verificano la $F(x, y) = 0$.

Se cambiamo sistema di riferimento, le nuove coordinate di P saranno in generale diverse dalle vecchie e quindi, pur continuando P ad appartenere a $\mathcal{L}$, ora le sue nuove coordinate in generale non verificano più la equazione $F(x, y) = 0$. Ciò vuol dire che l'equazione di $\mathcal{L}$ nel nuovo sistema non è più la F ma avrà una diversa espressione. Il problema è determinare quale.

Sia allora:

$$\begin{cases} x' = f(x, y)\,, \\ y' = g(x, y)\,, \end{cases} \tag{10.14}$$

l'espressione del cambiamento di coordinate e sia:

$$\begin{cases} x = f^*(x, y)\,, \\ y = g^*(x, y)\,, \end{cases} \tag{10.15}$$

l'espressione della trasformazione inversa.

Se $F(x, y) = 0$ era l'equazione del luogo $\mathcal{L}$ nelle vecchie coordinate, allora un punto P, di nuove coordinate (x', y'), apparterrà a $\mathcal{L}$ se e solo se le sue vecchie coordinate, $(x, y) = (f^*(x', y'), g^*(x', y'))$, verificavano la $F(x, y) = 0$.

L'equazione ottenuta dalla seguente espressione, dopo aver effettuato i calcoli, sarà l'equazione di $\mathcal{L}$ nel nuovo sistema di riferimento:

$$F((f^*(x', y'), g^*(x', y')) = 0\,.$$

Esempio 10.2.1 *Sia dato il cerchio di equazione* $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$ *in un sistema di riferimento.*

Consideriamo ora un nuovo sistema di riferimento ottenuto ruotando di 45^o *gli assi del vecchio sistema. L'espressione del cambiamento di coordinate, seguendo la (10.11) è data da:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Mentre la trasformazione inversa è data dalla seguente espressione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} .$$

Allora abbiamo le seguenti espressioni per x *e* y *in funzione di* x' *e di* y'*:*

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' , \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' .$$

Sostituendo queste espressioni alla x *e alla* y *nella equazione del cerchio, si ottiene:*

$$(x' - y')^2 + (x' + y')^2 - 2(x' - y') + (x' + y') = 0.$$

Eseguendo i calcoli, si ha:

$$x'^2 + y'^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{3\sqrt{2}}{2}y' = 0 ,$$

che è l'equazione del cerchio dato nel nuovo sistema di riferimento.

Osservazione 10.2.2 *Se le espressioni* f, g, f^* *e* g^* *sono polinomi di primo grado e l'equazione di un luogo geometrico* $\mathcal{L}$ *nelle coordinate* (x, y) *è un polinomio di grado* n*, allora l'equazione di* $\mathcal{L}$ *nel nuovo sistema di riferimento è ancora un polinomio di grado* n *nelle due variabili* x' *e* y'*.*

In particolare, se eseguiamo cambiamenti di coordinate del tipo rotazioni o traslazioni, l'equazione di una conica è sempre di secondo grado, perché tale era nel suo riferimento canonico.

Un discorso analogo si può fare per i cambiamenti di coordinate nello spazio. In questo caso, tenendo conto del fatto che abbiamo terne di coordinate, la

legge di cambiamento di coordinate, nel caso di una traslazione degli assi per un vettore $v = (x_0, y_0, z_0)$, è

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} .$$

Mentre per quanto riguarda le rotazioni degli assi:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \tag{10.16}$$

dove $M \in O(3)$.

La dimostrazione di quest'ultimo fatto richiederebbe qualche complemento di teoria. Si basa sul seguente fatto.

Osservazione 10.2.3 *Un cambiamento di coordinate da un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico ad un altro sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con la stessa unità di misura è una applicazione $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che è una isometria.*

Se inoltre è una rotazione degli assi, e dunque lascia fissa l'origine, essa, per il Teorema 8.4.5, è espressa da una matrice ortogonale.

10.3 Classificazione metrica delle coniche

Supponiamo che nel piano sia stato fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

Definizione 10.3.1 *Si dice* conica reale *il luogo di punti del piano le cui coordinate annullano un polinomio di secondo grado in due variabili a coefficienti reali.*

In questa definizione rientrano tutte le coniche viste nel paragrafo precedente ma il problema ora diventa:

Dato un polinomio di secondo grado, di quale conica si tratta?

E inoltre: tutti i luoghi di zeri di polinomi di secondo grado in due variabili si esauriscono in ellissi, parabole e iperboli o ve ne sono delle altre di forma diversa?

Questo paragrafo è dedicato alla soluzione di questi due quesiti.

Sia dunque $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ il generico polinomio di secondo grado in due variabili, per cui a, b, c non sono contemporaneamente nulli. Tale equazione si può scrivere nella forma:

$$(x, y)\begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d, e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0\,. \tag{10.17}$$

Sia ora M come in (10.13), matrice che esprime un cambiamento di coordinate nel piano, corrispondente ad una rotazione degli assi di un angolo θ. Per quanto visto nel paragrafo precedente, l'equazione della conica in questo nuovo sistema di riferimento diventa:

$$(x', y')M\begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix}{}^tM\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (d, e)\,{}^tM\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0\,, \tag{10.18}$$

in quanto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^tM\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Siccome $A = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix}$ è simmetrica, esiste M tale che $MA\,{}^tM$ è diagonale.

Sia $D = MA\,{}^tM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, dove λ_1, λ_2 sono gli autovalori di A.

La nuova equazione, nelle coordinate x', y', è dunque:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0\,, \tag{10.19}$$

dove $(d', e') = (d, e)\,{}^tM$.

Eseguiamo ora una traslazione di assi:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - \tau_1 \\ y' - \tau_2 \end{pmatrix}\,. \tag{10.20}$$

La (10.19) diventa, in questo nuovo sistema di riferimento:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + (2\lambda_1\tau_1 + d')x'' + (2\lambda_2\tau_2 + e')y'' + f' = 0\,, \tag{10.21}$$

dove $f' = \lambda_1\tau_1^2 + \lambda_2\tau_2^2 + d'\tau_1 + e'\tau_2 + f$. Si noti che f' si ottiene dalla espressione in (10.19) sostituendo (τ_1, τ_2) al posto di (x', y').

Abbiamo ora i seguenti casi:

Caso I. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$. Allora scegliendo:

$$\tau_1 = -\frac{d'}{2\lambda_1}, \quad \tau_2 = -\frac{e'}{2\lambda_2},$$

l'equazione (10.21) diventa:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0. \tag{10.22}$$

Caso II. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, e' \neq 0$. Allora scegliendo:

$$\tau_1 = -\frac{d'}{2\lambda_1}, \quad \tau_2 = -\frac{4\lambda_1 f - d'^2}{4\lambda_1 e'},$$

l'equazione (10.21) diventa:

$$\lambda_1 x''^2 + e' y'' = 0. \tag{10.23}$$

Caso III. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, e' = 0$. Allora scegliendo:

$$\tau_1 = -\frac{d'}{2\lambda_1}, \quad \tau_2 = 0,$$

l'equazione (10.21) diventa:

$$\lambda_1 x''^2 + f' = 0, \tag{10.24}$$

dove $f' = \lambda_1 \tau_1^2 + d'\tau_1 + f = \frac{4\lambda_1 f - d'^2}{4\lambda_1}$.

Osservazione 10.3.2 *Nei casi in cui sia* $\lambda = 0, \lambda_2 \neq 0$, *basta scambiare la* x' *con la* y' *e seguire poi lo stesso calcolo.*

Da notare che non può accadere che λ_1, λ_2 *siano entrambi nulli, altrimenti* A *sarebbe la matrice nulla e il polinomio iniziale non sarebbe di secondo grado.*

Adesso, a seconda dei segni degli autovalori, abbiamo la classificazione di tutte le forme canoniche per luoghi di zeri di polinomi di secondo grado (classificazione delle coniche in forma canonica).

Dal Caso I, con equazione $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0$, si hanno:

1. Ellisse reale.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

nel caso in cui $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (cioè sono concordi) e $-\frac{f'}{\lambda_1} > 0$.

2. Ellisse immaginaria.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1\,,$$

nel caso in cui $\lambda_1\lambda_2 > 0$ e $-\frac{f'}{\lambda_1} < 0$.

Questa conica è vuota, nel senso che nessun punto del piano le verifica la sua equazione.

Caso 3. Ellisse degenere.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0\,,$$

nel caso in cui $\lambda_1\lambda_2 > 0$ e $f' = 0$.

Questa conica si riduce alla sola origine.

Caso 4. Iperbole.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

nel caso in cui $\lambda_1\lambda_2 < 0$ e $f' \neq 0$.

Caso 5. Coppia di rette incidenti.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0\,,$$

nel caso in cui $\lambda_1\lambda_2 < 0$ e $f' = 0$.

L'equazione di questa conica si scrive come prodotto:

$$(bx + ay)(bx - ay) = 0\,.$$

Quindi la conica è l'unione delle due rette:

$$y = \frac{b}{a}x\,, \quad y = -\frac{b}{a}x\,.$$

Dal Caso II, con equazione $\lambda_2 x''^2 + e'y'' = 0$, si hanno:

Caso 6. Parabola.

$$x^2 = py\,,$$

con $p = -\frac{e'}{\lambda_1}$ se $e' \neq 0$.

Caso 7. Coppia di rette parallele.

$$x^2 = C^2\,,$$

nel caso in cui $-\frac{f'}{\lambda_1} > 0$ (avendo perciò posto $C^2 = -\frac{f'}{\lambda_1} > 0$).

Nel riferimento canonico l'equazione si riduce al prodotto:

$$(x + C)(x - C) = 0\,.$$

Per cui la conica è data dall'unione delle due rette verticali:

$$x = C\,, \quad x = -C\,.$$

Caso 8. Coppia di rette coincidenti.

$$x^2 = 0\,,$$

nel caso in cui $-\frac{f'}{\lambda_1} = 0$.

Caso 9. Coppia di rette parallele immaginarie.

$$x^2 = -C^2\,,$$

nel caso in cui $-\frac{f'}{\lambda_1} < 0$ (avendo posto $C^2 = \frac{f'}{\lambda_1}$).

Anche questa conica non ha punti nel piano reale.

10.4 Invarianti di una conica

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che, data una equazione di secondo grado, è possibile determinare un sistema di riferimento privilegiato, detto sistema di riferimento canonico, nel quale l'equazione data si riduce ad una delle nove forme canoniche, dalle quali poi è facile dedurre di quale conica si tratta.

Vogliamo ora associare ad una conica alcuni numeri utilizzando i quali sarà poi facile classificare la conica stessa.

Sia dunque $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ il generico polinomio di secondo grado in due variabili, per cui a, b, c non sono contemporaneamente nulli. Sia $\mathcal{C}$ la conica che è il luogo dei punti ove si annulla tale polinomio. La matrice

$$Q = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$

è detta *matrice associata alla conica* $\mathcal{C}$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix}$ è detta matrice della parte principale di $\mathcal{C}$. Questa non è mai la matrice nulla.

Definizione 10.4.1 *I numeri:*

$$I_1 = \mathrm{tr} A = a + b\,, \quad I_2 = \det A = ab - \frac{c^2}{4}\,, \quad I_3 = \det Q\,,$$

si dicono invarianti (affini) *rispettivamente di primo, secondo e terzo ordine della conica* $\mathcal{C}$.

Una conica tale che $I_3 = 0$ *viene detta* degenere.

Il nome di invarianti è giustificato dalla seguente proposizione

Proposizione 10.4.2 *Sia* $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ *l'equazione di una conica in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e sia:* $a'x'^2 + b'y'^2 + c'x'y' + d'x' + e'y' + f' = 0$ *l'equazione della stessa conica in un altro sistema di riferimento ottenuto tramite una traslazione o una rotazione degli assi del vecchio sistema.*

Allora si ha:

$$I_1 = I_1'\,, \quad I^2 = I'^2\,, \quad I_3 = I_3'\,.$$

Osservazione 10.4.3 *Sia inoltre*

$$k = \det \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} & f \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b & \frac{e}{2} \\ \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}\,.$$

Il numero k *è invariante per rotazioni degli assi, ma non per traslazioni.*

Infatti si può dimostrare che se consideriamo una traslazione di assi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix}\,,$$

allora si trova

$$k' = k + I_2(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha(bd - \frac{ec}{2}) + \beta(ae - \frac{cd}{2}).$$

Come si suol dire, k è un seminvariante, cioè è invariante solo per rotazioni degli assi.

Osserviamo però che, se $\mathcal{C}$ è una conica tale che la sua equazione sia del tipo (10.24), allora, siccome $I^2 = 0$ e $b = c = 0$, k è invariante anche per traslazioni con $\beta = 0$. Dunque k è ben definito per le coniche le cui forme canoniche siano come nei Casi 7, 8 e 9.

Abbiamo allora il seguente specchietto:

$$I_2 > 0 \qquad \begin{cases} I_3 \neq 0 & \begin{cases} I_3 I_1 > 0 & \text{ellisse immaginaria} \\ I_3 I_1 < 0 & \text{ellisse reale} \end{cases} \\ I_3 = 0 & \text{ellisse degenere (punto)} \end{cases} \tag{10.25}$$

$$I_2 = 0 \qquad \begin{cases} I_3 \neq 0 & \text{parabola} \\ I_3 = 0 & \begin{cases} k > 0 & \text{rette immaginarie} \\ k = 0 & \text{rette coincidenti} \\ k < 0 & \text{rette parallele} \end{cases} \end{cases} \tag{10.26}$$

$$I_2 < 0 \qquad \begin{cases} I_3 \neq 0 & \text{iperbole} \\ I_3 = 0 & \text{coppia di rette incidenti} \end{cases} \tag{10.27}$$

Per dimostrare la validità di questo specchietto, basta verificarlo per le coniche in forma canonica. Siccome poi I_1, I_2 e I_3 sono invarianti per cambiamenti di coordinate che siano rotazioni o traslazioni degli assi, la classificazione è valida anche per una qualsiasi conica.

Esempio 10.4.4 *Consideriamo la conica di equazione:*

$$2x^2 - y^2 + 2xy + x + 1 = 0.$$

Ad essa associamo la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo i suoi invarianti:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2-1=1\,, \\ I_2 &= -2-1=-3\,, \\ I_3 &= \det Q = -2+\frac{1}{4}-1=-\frac{11}{4}\,. \end{aligned}$$

Allora $I_2 < 0$ e $I_3 \neq 0$, pertanto $\mathcal{C}$ è un'iperbole.

10.5 Centro e assi di una conica

Sia $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ l'equazione di una conica $\mathcal{C}$.

Supponiamo che il punto $C=(\alpha,\beta)$ sia un centro di simmetria per la conica data, ossia tale che se $P\in\mathcal{C}$ e P' è tale che C sia il punto medio del segmento PP', allora anche $P'\in\mathcal{C}$.

Se $P\in\mathcal{C}$ ha coordinate (x,y), il simmetrico P' di P rispetto a C avrà coordinate $(2\alpha-x,2\beta-y)$. Affinché anche $P'\in\mathcal{C}$, si dovrà avere:

$$a(2\alpha-x)^2+b(2\beta-y)^2+c(2\alpha-x)(2\beta-y)+d(2\alpha-x)+e(2\beta-y)+f=0\,.$$

Eseguendo i calcoli:

$$(ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f)+4(a\alpha^2+b\beta^2+c\alpha\beta+\frac{d}{2}\alpha+\frac{e}{2}\beta)$$
$$-4(a\alpha x+b\beta y+\frac{c}{2}\alpha y+\frac{c}{2}\beta x+\frac{d}{2}x+\frac{e}{2}y)=0\,.$$

Siccome $P=(x,y)\in\mathcal{C}$, allora $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$.

Allora, raccogliendo e semplificando, si ha:

$$(a\alpha+\frac{c}{2}\beta+\frac{d}{2})x+(\frac{c}{2}\alpha+b\beta+\frac{e}{2})y=a\alpha^2+b\beta^2+c\alpha\beta+\frac{d}{2}\alpha+\frac{e}{2}\beta\,. \quad (10.28)$$

Allora $C=(\alpha,\beta)$ è un centro di simmetria se e solo se questa equazione ha come soluzioni tutti i punti della conica e questo accade se e solo se

$$a\alpha+\frac{c}{2}\beta+\frac{d}{2}=0 \text{ e } \frac{c}{2}\alpha+b\beta+\frac{e}{2}=0\,. \quad (10.29)$$

In tal caso vale anche:

$$a\alpha^2+b\beta^2+c\alpha\beta+\frac{d}{2}\alpha+\frac{e}{2}\beta=\alpha(a\alpha+\frac{c}{2}\beta+\frac{d}{2})+\beta(\frac{c}{2}\alpha+b\beta+\frac{e}{2})=0\,.$$

Pertanto ogni punto della conica verifica la (10.28). Se, viceversa una delle due espressioni in (10.29) non fosse identicamente nulla, (10.28) sarebbe una retta e allora solo i punti di intersezione tra la conica $\mathcal{C}$ e questa retta avrebbero i loro simmetrici sulla conica.

Osserviamo che (10.29) è equivalente al sistema lineare scritto in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ -\frac{e}{2} \end{pmatrix} . \tag{10.30}$$

Le soluzioni α, β di questo sistema sono le coordinate dei centri di simmetria.

Osserviamo che se $I_2 = \det \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} \neq 0$ la conica ha uno ed un solo centro. In tal caso $\mathcal{C}$ viene detta *conica a centro*.

Sia come al solito

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} .$$

Sappiamo che esiste $M \in O(2)$ tale che $MA\,{}^tM$ è diagonale. Sia

$$D = MA\,{}^tM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} ,$$

dove λ_1 e λ_2 sono gli autovalori di A.

Nel nuovo sistema di riferimento l'equazione di $\mathcal{C}$ è data dalla (10.19):

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0 .$$

Se λ_1 e λ_2 sono entrambi non nulli, allora la conica data è a centro ($I_2 = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$). La traslazione degli assi che porta l'origine del nuovo sistema a coincidere con il centro di simmetria della conica, trasforma l'equazione di $\mathcal{C}$ nell'equazione canonica

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0 .$$

Gli assi cartesiani di questo sistema di riferimento sono assi di simmetria per la conica, come visto in §10.1. Ma questi assi cartesiani sono paralleli agli assi del sistema di riferimento in cui A si diagonalizza, che sono gli autospazi di A relativi agli autovalori λ_1 e λ_2.

In altre parole:

Osservazione 10.5.1 *Gli assi di simmetria di una conica a centro sono le rette parallele agli autospazi di A relativi agli autovalori λ_1 e λ_2 e passanti per il centro della conica.*

Con ragionamento analogo si dimostra che anche nel caso in cui $\lambda_2 = 0$, l'asse di simmetria di $\mathcal{C}$ è la retta parallela all'autospazio relativo all'autovalore nullo di A e passante per il vertice di $\mathcal{C}$, se $\mathcal{C}$ è una parabola, oppure per uno degli infiniti centri di $\mathcal{C}$, se $\mathcal{C}$ è una coppia di rette parallele o coincidenti.

10.6 Classificazione delle quadriche

Supponiamo di porre nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. In questo modo i punti dello spazio sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathbb{R}^3$, le terne ordinate di numeri reali. Abbiamo già visto che le equazioni di primo grado in tre variabili descrivono i piani nello spazio. Vogliamo prendere ora in esame i luoghi di zeri di equazioni di secondo grado in tre variabili.

Definizione 10.6.1 *Si dice* quadrica reale *il luogo di punti dello spazio le cui coordinate annullano un polinomio di secondo grado in tre variabili a coefficienti reali.*

Sia $P(x, y, z) = 0$ l'equazione di una quadrica. Sia $P(x, y, z)$ il seguente polinomio di secondo grado in tre variabili scritto nella massima generalità

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}\,.$$

Analogamente a come è stato fatto per le coniche, anche in questo caso cercheremo un sistema di riferimento opportuno, nel quale l'equazione della quadrica sia particolarmente semplice e quindi facile da riconoscere e classificare e anche facile da studiare.

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

la matrice della parte principale di $\mathcal{Q}$ e

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

la matrice completa di $\mathcal{Q}$.

Sia A che Q sono simmetriche e la loro scrittura è facilitata dalla scelta dei nomi dei coefficienti. Ad esempio a_{13} è la metà del coefficiente del termine xz. Inoltre A non è la matrice nulla, altrimenti $P(x,y,z)$ non sarebbe un polinomio di secondo grado.

L'equazione della quadrica allora si può scrivere in forma matriciale nel seguente modo:

$$(x,y,z)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2\,(a_{14},a_{24},a_{34})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_{44} = 0 \qquad (10.31)$$

o anche:

$$(x,y,z,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,. \qquad (10.32)$$

Analizziamo i vari casi.

Caso I. $\det A \neq 0\,.$ Sia $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = -A^{-1}\nu$, dove $\nu = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$.

Se consideriamo un nuovo sistema di riferimento ottenuto dalla traslazione degli assi per il vettore τ:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-\tau_1 \\ y-\tau_2 \\ z-\tau_3 \end{pmatrix}\,,$$

la (10.31) diventa:

$$(x',y',z')A\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 2\,\left((a_{14},a_{24},a_{34}) + (\tau_1,\tau_2,\tau_3)A\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \gamma = 0\,.$$

Per come è definito τ, si ha

$$(a_{14},a_{24},a_{34}) + (\tau_1,\tau_2,\tau_3)A = 0\,,$$

e dunque:

$$(x',y',z')A\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \gamma = 0\,, \qquad (10.33)$$

dove $\gamma = P(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ e $\gamma = \frac{\det Q}{\det A}$.

Se consideriamo ora una rotazione degli assi, il cambiamento di coordinate sarà dato dalla espressione:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

dove $M \in O(3)$, come osservato in (10.16). Allora (10.33) diventa:

$$(x'', y'', z'') M A\, {}^t\! M \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \gamma = 0\,.$$

Siccome A è simmetrica, esiste $M \in O(3)$ tale che $MA\,{}^t\!M = D$ è diagonale (come risulta dalla dimostrazione del Corollario 8.5.12) e sia $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ dove λ_i sono gli autovalori di A (tutti reali perché A è simmetrica). Inoltre, poiché abbiamo supposto $\det A \neq 0$, siccome $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, allora tutti e tre i λ_i sono non nulli.

Allora, nelle nuove coordinate (x'', y'', z''), l'equazione della nostra quadrica $\mathcal{Q}$ assume la seguente forma generale:

$$\lambda_1 x''^2 +_\lambda 2y''^2 + \lambda_3 z''^2 + \gamma = 0\,. \tag{10.34}$$

A seconda dei segni dei λ_i e di γ, la quadrica $\mathcal{Q}$ può assumere una delle seguenti forme canoniche:

Caso 1. Ellisoide reale.

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1$$

se $\gamma \neq 0$ e $-\frac{\lambda_i}{\gamma} > 0$ per ogni $i = 1, 2, 3$.

Caso 2. Ellissoide immaginario.

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = -1$$

se $\gamma \neq 0$ e $\frac{\lambda_i}{\gamma} > 0$ per ogni $i = 1, 2, 3$.

La quadrica non ha punti a coordinate reali.

Caso 3. Ellisoide degenere.

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 0$$

se $\gamma = 0$ e i λ_i hanno tutti lo stesso segno.

La quadrica si riduce alla sola origine.

Caso 4. Cono.

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0$$

se $\gamma = 0$ e i λ_i non hanno tutti lo stesso segno; perciò a meno scambiare gli assi e moltiplicare per -1 l'equazione, possiamo supporre che λ_3 sia negativo e gli altri due siano positivi.

Caso 5. Iperboloide iperbolico o ad una falda.

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 1$$

se $\gamma \neq 0$ e $-\frac{\lambda_i}{\gamma} > 0$ per $i = 1, 2$, mentre $-\frac{\lambda_3}{\gamma} < 0$.

Caso 6. Iperboloide ellittico o a due falde.

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = -1$$

se $\gamma \neq 0$ e $\frac{\lambda_i}{\gamma} > 0$ per $i = 1, 2$, mentre $\frac{\lambda_3}{\gamma} < 0$.

Caso II. $\det A = 0$. In questo caso operiamo subito la rotazione degli assi:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

con $M \in O(3)$ tale che $MA\,{}^tM = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Almeno uno dei tre autovalori però, essendo $\det A = 0$, è nullo.

Sottocaso I. $\text{rk}A = 2$. Ciò significa che un solo autovalore di A è nullo. Supponiamo, a meno di scambiare gli assi, che sia $\lambda_3 = 0$, mentre $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$.

L'equazione di $\mathcal{Q}$ diventa:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2ax' + 2by' + 2cz' + d = 0 . \tag{10.35}$$

Eseguiamo ora una traslazione di assi:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - t_1 \\ y' - t_2 \\ z' - t_3 \end{pmatrix} ,$$

dove

$$\begin{cases} t_1 = -\frac{a}{\lambda_1} , \quad t_2 = -\frac{b}{\lambda_2} , \quad t_3 = -\frac{d\lambda_1\lambda_2 - a^2\lambda_2 - b^2\lambda_1}{2c\lambda_1\lambda_2} , & \text{se } c \neq 0 , \\ t_1 = -\frac{a}{\lambda_1} , \quad t_2 = -\frac{b}{\lambda_2} , \quad t_3 = 0 , & \text{se } c \neq 0 . \end{cases}$$

Distinguere i due casi è facile perché eseguendo i calcoli si scopre che

$$\det Q = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = -\lambda_1\lambda_2 c^2 .$$

Pertanto, $c = 0 \iff \det Q = 0$.

Allora nelle nuove coordinate (x'', y'', z'') la equazione della quadrica assume una delle seguenti forme canoniche:

Caso 7. Paraboloide ellittico.

$$z = a^2x^2 + b^2y^2$$

se $c \neq 0$ (e cioè $\det Q \neq 0$) e se $\lambda_1\lambda_2 > 0$.

Caso 8. Paraboloide iperbolico.

$$z = a^2x^2 - b^2y^2$$

se $c \neq 0$ (e cioè $\det Q \neq 0$) e se $\lambda_1\lambda_2 < 0$.

Caso 9 Retta.

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 0$$

se $c = 0$ (cioè $\det Q \neq 0$) e se $\lambda_1\lambda_2 > 0$ e $\delta = 0$, dove $\delta = d - \frac{a^2}{\lambda_1} - \frac{b^2}{\lambda_2}$.

Questa conica coincide con l'asse z di equazione $\{x = 0, y = 0\}$.

Caso 10. Coppia di piani incidenti.

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0$$

se $c = 0$ (cioè $\det Q \neq 0$) e se $\lambda_1\lambda_2 < 0$ e $\delta = 0$, dove $\delta = d - \frac{a^2}{\lambda_1} - \frac{b^2}{\lambda_2}$.

Questa conica è data dalla coppia di piani di equazioni: $ax + by = 0$ e $ax - by = 0$.

Caso 11. Cilindro ellittico.

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 1$$

se $c = 0$ (cioè $\det Q \neq 0$) e se $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\delta \neq 0$ e $-\frac{\lambda_1}{\delta} > 0$, $-\frac{\lambda_2}{\delta} > 0$.

Caso 12. Cilindro immaginario.

$$a^2x^2 + b^2y^2 = -1$$

se $c = 0$ (cioè $\det Q \neq 0$) e se $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\delta \neq 0$ e $\frac{\lambda_1}{\delta} > 0$, $\frac{\lambda_2}{\delta} > 0$.

Caso 13. Cilindro iperbolico.

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 1$$

se $c = 0$ (cioè $\det Q \neq 0$) e se $\lambda_1\lambda_2 < 0$ e $\delta \neq 0$.

Osservazione 10.6.2 *Nel caso in cui $c = 0$ la matrice completa della conica $\mathcal{Q}$ è*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Se consideriamo il suo minore

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & b \\ a & b & d \end{pmatrix} ,$$

abbiamo $\det N = \lambda_1\lambda_2 d - \lambda_1 b^2 - \lambda_2 a^2 = \lambda_1\lambda_2\delta$.

Pertanto, $\delta = 0$ *se e solo se* $\mathrm{rk}Q = 2$.

Sottocaso II. $\mathrm{rk}A = 1$. Questo equivale a dire che $\lambda_1 \neq 0$ mentre $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Nel sistema di riferimento (x', y', z') in cui A si diagonalizza, l'equazione della quadrica $\mathcal{Q}$ diventa:

$$\lambda_1 x'^2 + 2ax' + 2by' + 2cz' + d = 0 . \tag{10.36}$$

Eseguiamo la traslazione di assi:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - t_1 \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

con $t_1 = -\frac{a}{\lambda_1}$.

L'equazione (10.36) diventa:

$$\lambda_1 x''^2 + 2by'' + 2cz'' + \alpha = 0 , \tag{10.37}$$

dove $\alpha = d - \frac{a^2}{\lambda_1}$.

In questo caso la matrice completa della quadrica risulta essere:

$$Q'' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & b & c & \alpha \end{pmatrix} .$$

Osserviamo che:

1. $\mathrm{rk}Q''(= \mathrm{rk}Q) = 1$ se e solo se $b = c = 0$ e $\alpha = 0$.

2. $\mathrm{rk}Q'' = 2$ se e solo se $b = c = 0$ e $\alpha \neq 0$.

3. $\mathrm{rk}Q'' = 3$ se e solo se $b \neq 0$ oppure $c \neq 0$.

Abbiamo allora le seguenti forme canoniche:

Caso 14. Coppia di piani coincidenti.

$$x^2 = 0$$

se rk$Q = 1$ e $\alpha = 0$.

Caso 15. Coppia di piani paralleli.

$$a^2x^2 = 1$$

se rk$Q = 2$ e $\alpha\lambda_1 < 0$.

Caso 16. Coppia di piani immaginari.

$$a^2x^2 = -1$$

se rk$Q = 2$ e $\alpha\lambda_1 > 0$.

Se rk$Q = 3$, supponiamo che sia $b \neq 0$. Eseguiamo una rotazione degli assi data dal seguente elemento di $O(3)$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

Nel sistema di riferimento:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} .$$

L'equazione (10.37) diventa:

$$\lambda_1 x'''^2 + (2b\cos\theta + 2c\sin\theta)y''' + (2c\cos\theta - 2b\sin\theta)z''' + \alpha = 0 .$$

Scegliendo θ tale che $\tan\theta = \frac{c}{b}$, questa equazione si trasforma in:

$$\lambda_1 x'''^2 + \beta y''' + \alpha = 0 , \qquad (10.38)$$

dove $\beta = 2\cos\theta(b^2 + c^2) \neq 0$.

Con una nuova traslazione:

$$x''' = x'''' , y'''' = y''' - t , z'''' = z''' , \quad \text{con } t = -\frac{\alpha}{\beta}$$

la (10.38) fornisce infine:

Caso 17. Cilindro parabolico.

$$a^2x^2 = y$$

se $\mathrm{rk}Q = 2$.

Questo conclude la classificazione delle quadriche reali.

Dalle forme canoniche è facile inoltre ricavare l'esistenza di centri, assi e piani di simmetria, cosa che viene lasciata per esercizio.

Osservazione 10.6.3 *Per determinare gli autovalori della matrice A, la matrice della parte principale di una quadrica, bisogna risolvere una equazione di terzo grado, l'equazione caratteristica di A.*

Questo procedimento è abbastanza lungo (vedi § 2.5) e d'altra parte è importante, ai fini della classificazione di una quadrica, soltanto stabilire il segno degli autovalori di A. Ma per far questo, basta applicare il criterio di cartesio al polinomio caratteristico di A, che, essendo simmetrica, ha sicuramente tutti gli autovalori reali.

10.7 Esercizi

Coniche

1) Determinare un'isometria che trasformi la conica di equazione

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$

nella sua forma canonica.

2) Determinare un'isometria che trasformi la conica di equazione

$$4x^2 + 6xy - 4y^2 - 26x + 18y - 39 = 0$$

nella sua forma canonica.

3) Determinare un'isometria che trasformi la conica di equazione

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2y = 0$$

nella sua forma canonica.

4) Classificare affinemente la conica di equazione

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 4 = 0\,.$$

5) Classificare affinemente, al variare del parametro reale α, le coniche

$$-2y^2 + (1 + 2\alpha)xy - (1 + 2\alpha)y - \alpha x + \alpha = 0\,.$$

6) Classificare affinemente, al variare del parametro reale λ, le coniche

$$4x^2 + y^2 + (5 + \lambda)xy - 12x - 6y + 8 = 0\,.$$

Trovare le equazioni delle rette nei casi degeneri. Si provi infine che tutte le coniche passano per quattro punti fissati.

7) a) Classificare affinemente, al variare del parametro reale k, le conica

$$3kx^2 - 2y^2 + 2x - 2y - 1 = 0\,.$$

b) Dire per quali valori di k esiste un'affinità del piano che trasforma la conica data nella seguente

$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0\,.$$

Capitolo 11

CURVE IN $\mathbb{R}^3$

11.1 Curve regolari

Definizione 11.1.1 *Si dice* curva parametrica regolare *una applicazione* $X : I \to \mathbb{R}^3$*, dove* $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$*, avente le seguenti proprietà:*

i) X *è di classe* C^1 *(derivabile con derivata continua) su* I*;*

ii) $\dot{X}(t) \neq 0$ *per ogni* $t \in I$*.*

Qui abbiamo posto:

$$\dot{X}(t) = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} .$$

Definizione 11.1.2 *Una funzione* $t' : I \to J$*, con* $J = (a', b') \subseteq \mathbb{R}$*, è detta* cambiamento regolare di parametro *se è di classe* C^1 *su* I *ed inoltre* $\frac{dt'}{dt} \neq 0$ *per ogni* $t \in I$*.*

Definizione 11.1.3 *Due curve parametriche regolari:*

$$X : I \to \mathbb{R}^3\,, \; con\ I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}\,, \quad e \quad Y : J \to \mathbb{R}^3\,, \; con\ J = (a', b') \subseteq \mathbb{R}\,,$$

sono equivalenti *se esiste un cambiamento regolare di parametro* $t' : I \to J$ *tale che* $X(t) = Y(t'(t))$ *per ogni* $t \in I$*.*

In effetti è facile verificare che la precedente è una relazione di equivalenza.

Definizione 11.1.4 *Si dice* curva regolare *una classe di equivalenza di curve parametriche regolari.*

Esempio 11.1.5 *Sia X, $t \in I = \mathbb{R}$, la curva parametrizzata regolare così definita:*

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \\ \frac{h}{2\pi}t \end{pmatrix} \qquad \textit{con } R, h \textit{ reali positivi.}$$

X viene detta elica cilindrica *di raggio R e passo h.*

11.2 Lunghezza d'arco

Sia X una curva parametrizzata regolare. Un arco di X è la restrizione di X ad un intervallo chiuso $[c, d] \subseteq (a, b) = I$.

Sia $t_0 = c < t_1 < \cdots < t_n = d$ una suddivisione di $[c, d]$ e siano $P_0, P_1, \ldots, P_n$ i corrispondenti punti in $\mathbb{R}^3$, $P_i = X(t_i)$.

$$\mathcal{P} = \cup_{i=0}^{n-1} P_i P_{i+1},$$

dove $P_i P_{i+1}$ è il segmento di estremi P_i e P_{i+1}, è detta poligonale inscritta nell'arco e

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(P_i P_{i+1})$$

la sua lunghezza.

Definizione 11.2.1 *Un arco A di curva regolare parametrizzata X è detto* rettificabile *se $\sup_{\mathcal{P}}(L(\mathcal{P})) < +\infty$, dove $\mathcal{P}$ varia nell'insieme di tutte le poligonali inscritte in A.*

In questo caso, $L(A) = \sup_{\mathcal{P}}(L(\mathcal{P}))$ è detta lunghezza *dell'arco A.*

Esempio 11.2.2 *Sia $X(t)$, $t \in I = \mathbb{R}$, la curva parametrizzata regolare così definita:*

$$X(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{dove } g(t) = \begin{cases} 0 & \textit{se } t \leq 0\,, \\ t\cos(1/t) & \textit{se } t > 0\,. \end{cases}$$

L'arco definito su $[0,1]$ *non è rettificabile. Infatti scegliendo la suddivisione data da:*

$$t_0 = 0\,, \quad t_1 = 1/(n-1)\pi\,, \quad t_2 = 1/(n-2)\pi\,, \quad \ldots, \quad t_{n-1} = 1/\pi\,, \quad t_n = 1\,,$$

se con $\mathcal{P}_n$ *indichiamo la corrispondente poligonale inscritta, si può stimare che:*

$$L(\mathcal{P}_n) \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k+1}\,.$$

Vale il seguente risultato, di cui non riportiamo la dimostrazione.

Teorema 11.2.3 *Se* A *è un arco della curva parametrizzata regolare* $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ *definito nell'intervallo chiuso* $[c,d]$, *allora*

$$L(A) = \int_c^d \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{dz}{dt}\right)}dt = \int_c^d \left|\frac{dX}{dt}\right| dt\,.$$

Sia $X : I \to \mathbb{R}^3$, $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$, una curva parametrizzata regolare e fissiamo un punto $t_0 \in (a,b)$.

Osservazione 11.2.4 *La funzione* $s(t) = \int_{t_0}^t \left|\frac{dX}{d\tau}\right| d\tau$ *è un cambiamento regolare di parametro.*

Il parametro s così ottenuto è detto *parametro lunghezza d'arco*. Una curva parametrizzata così è facile da studiare; purtroppo molto spesso è difficile invertire la funzione $s(t)$ ed ottenere quindi $X(t)$ parametrizzata con la lunghezza d'arco.

Definizione 11.2.5 *Il vettore* $\mathbf{T}(s_0) = \frac{dX(s_0)}{ds}$ *è detto* vettore tangente *alla curva* $\mathbf{X}(t)$ *in* s_0.

Osservazione 11.2.6 *Per la regola di derivazione dellefunzioni composte, si ha:*

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{T}(t)\frac{dX(t)}{dt}\,.$$

Questo ci permette di calcolare $\mathbf{T}$ *senza dover passare per la parametrizzazione con la lunghezza d'arco:*

$$\mathbf{T} = \frac{\frac{dX(t)}{dt}}{\frac{dX(t)}{dt}} .$$

In particolare, $|\mathbf{T}| = 1$.

La retta tangente alla curva nel punto $X(t_0)$ ha equazione:

$$r(\tau) = \mathbf{T}(t_0)\tau + \mathbf{X}(t_0) , \quad \text{con } \tau \in \mathbb{R} .$$

Il piano avente $\mathbf{T}(t_0)$ come parametri direttori e passante per $\mathbf{X}(t_0)$ è detto *piano normale* al curva $\mathbf{X}(t)$ nel punto $\mathbf{X}(t_0)$.

11.3 Curvatura e torsione

Sia $\mathbf{X}$ una curva parametrizzata con la lunghezza d'arco.

Definizione 11.3.1 *Il vettore di lunghezza unitaria* $\mathbf{N}(s)$ *tale che*

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| \mathbf{N}(s)$$

è detto versore normale *alla curva* $\mathbf{X}$*, mentre la funzione*

$$k(s) = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$$

è detta curvatura *della curva data.*

Nei punti dove $k(s) \neq 0$, la quantità $R = 1/k$ è detto raggio di curvatura della curva X.

Esempio 11.3.2 *Sia* $X(t)$*,* $t \in I = \mathbb{R}$*, la curva parametrizzata regolare così definita:*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} C(t) \\ S(t) \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dove

$$C(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \cos(\tau^2) d\tau \,, \quad S(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \sin(\tau^2) d\tau \,,$$

è detta clotoide.

Essa ha la seguente proprietà: se $\mathbf{X}$ venisse parametrizzata secondo lunghezza d'arco s, si avrebbe $k(s) = \pi s$, cioè la curvatura è proporzionale alla lunghezza d'arco.

Osservazione 11.3.3 *Per verificare quanto affermato nell'esempio precedente, sarebbe difficile riparametrizzare la curva secondo il parametro d'arco; però è possibile esprimere la curvatura nel modo seguente:*

$$k = \frac{|\mathbf{X}' \wedge \mathbf{X}''|}{|\mathbf{X}'|^3} \,,$$

dove $\mathbf{X}''$ è il vettore delle derivate seconde di $\mathbf{X}$ (che quindi deve essere almeno di classe $\mathcal{C}^2$).

Definizione 11.3.4 *Il vettore lunghezza unitaria*

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s)$$

è detto versore binormale.

Se calcoliamo $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$, poiché $\mathbf{N}$ ha norma 1, si a che $\mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds} = 0$. Allora:

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \alpha(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s) \,,$$

poiché $\mathbf{T}$ e $\mathbf{B}$ generano il piano ortogonale a $\mathbf{N}$.

Osservazione 11.3.5 *La funzione $\alpha(s)$ coincide con $-k(s)$.*
Infatti

$$0 = \frac{d(\mathbf{T} \cdot \mathbf{N})}{dt} = \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{N}} = k(s) + \alpha(s) \,.$$

Definizione 11.3.6 *La funzione $\tau(s)$ è detta torsione della curva $\mathbf{X}$.*

Anche per la torsione vi è un modo per calcolarla senza parametrizzare la curva secondo la lunghezza d'arco:

$$\tau = \frac{(\mathbf{X}' \wedge \mathbf{X}'') \cdot \mathbf{X}'''}{|\mathbf{X}' \wedge \mathbf{X}''|^2} .$$

Per verificare questa formula basta applicare la regola di Leibniz alla relazione:

$$\tau = \frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{B} .$$

Definizione 11.3.7 *Le relazioni precedenti si possono compendiare nell'espressione matriciale:*

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{T}} \\ \dot{\mathbf{N}} \\ \dot{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} ,$$

detta formule di Frénet. *I tre vettori* $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ *formano una terna ortonormale orientata positivamente, detto sistema di riferimento di Frenet.*

Nel caso delle curve piane, affinché la base $\mathbf{T}, \mathbf{N}$ sia orientata positivamente, la curvatura può avere segno negativo.

Definizione 11.3.8 *Il piano passante per* $X(t_0)$ *e perpendicolare a* $\mathbf{B}(t_0)$ *è detto* piano osculatore *e, se la curva è piana, coincide con il piano a cui appartiene la curva.*

Il piano passante per $X(t_0)$ *e perpendicolare a* $\mathbf{N}(t_0)$ *è detto* piano rettificante.

Concludiamo con il seguente teorema di esistenza e unicità di curve con data curvatura e torsione.

Teorema 11.3.9 *Siano* $k : (a, b) \to \mathbb{R}$, $k(s) \geq 0$, *e* $\tau : (a, b) \to \mathbb{R}$. *Allora esite una curva parametrizzata* $X : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ *tale che la curvatura di* X *sia* k *e la sua torsione sia* τ.

Una tale curva è unica nel senso che, se Y *è un'altra curva parametrizzata, con le stesse proprietà, allora esiste una isometria* $\Omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $\mathbf{Y}(t) = \Omega(\mathbf{X}(t))$.

Cronologia dei matematici citati

Pitagora (VI sec. a.C.)
Euclide (III sec. a.C.)
René du Perron Descartes (1596–1650)
Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)
Gabriel Cramer (1704–1752)
Alexandre Théophile Vandermonde (1735–1796)
Pierre Simon Laplace (1749–1827)
Lazare Carnot (1753–1823)
Paolo Ruffini (1765–1822)
Carl Friedrich Gauss (1777–1855)
Niels Henrik Abel (1802–1829)
William Rowan Hamilton (1805–1865)
Augustus de Morgan (1806–1871)
Évariste Galois (1811–1832)
James Joseph Sylvester (1814–1897)
Fréderic-Jean Frénet (1816–1900)
Arthur Cayley (1821–1895)
Charles Hermite (1822–1901)
Eugène Rouché (1832–1910)
Camille Jordan (1838–1921)
Georg Cantor (1845–1918)
Jörgen Pedersen Gram (1850–1916)
Alfredo Capelli (1855–1910)
Bertrand Russell (1872–1970)
Erhard Schmidt (1876–1959)
Frigyes Riesz (1880–1956)
Sergej Natanovič Bernstein (1880–1968)

Indice analitico